

## Linienglättung mit Snakes als Filteroperation

SIEGFRIED MEIER, Dresden & STEFAN STEININGER, Zürich

**Keywords:** cartographic generalization, line smoothing, active splines, snakes

**Zusammenfassung:** Die Linienglättung ist eine vergleichsweise einfache Prozedur – z. B. kann sie durch Tiefpassfilterung erfolgen. Hier werden, mit Rücksicht auf kombinierte Operationen der kartographischen Generalisierung, Glättungsalgorithmen mit Snakes untersucht: Unterschiedliche Snakes-Modelle, Ansätze der inneren und äußeren Energie, konstante und krümmungsabhängige Steuerung, Segmentierung und Skalierung, Iterationsvorschriften mit Abbruchkriterien, usf. – Die strukturellen Ergebnisse werden mithilfe von Filtercharakteristiken diskutiert und die numerischen an ausgewählten Testbeispielen illustriert.

**Summary:** *Line smoothing by snakes as filtering.* Line smoothing is a comparably simple procedure, e. g. low pass filtering. Here smoothing algorithms by snakes are examined with respect to combined procedures of cartographic generalization: Different snake models, terms of the internal energy and the external one, constant and curvature dependent controlling, segmentation, spacing, iteration procedures with stopping criteria, etc. – The structural results are discussed by means of frequency responses and the numerical one are illustrated by selected test examples.

### 1 Zielstellung

Aktive Konturen oder Energie minimierende Splines, bekannt unter dem Synonym *snakes*, wirken – geodätisch und *ad hoc* gesprochen – wie ausgleichende Funktionen und können deshalb zur Glättung von Liniensobjekten (LO) herangezogen werden. Nachdem die Snakes-Technik bereits zur formerhaltenden Verdrängung von LO erprobt und mit Zugriff auf ATKIS-Daten praxistauglich gemacht wurde (BURGHARDT & MEIER 1997, MEIER & BURGHARDT 1997, BADER 2001, BURGHARDT 2001, MEIER 2001), lag es nahe, LO mit Snakes zu glätten, ferner die gemeinsame Glättung und Verdrängung in lokalen Konfliktsituationen nach einheitlichen Algorithmen im Snakes-Konzept zu realisieren. Denn wie Recherchen „gut“ generalisierter topographischer Karten zeigen, wird in solchen Situationen sowohl geglättet als auch verdrängt (BURGHARDT 2001).

Die Glättung von LO ist bisher in der kartographischen Generalisierung mit einfachen Glättungsfiltern, wie dem Gaußfilter (BABAUD et al. 1986, PLAZANET et al. 1998), oder Spline-Interpolation (McMASTER 1989) durchgeführt worden. Argumente, die für die Anwendung glättender Snakes sprechen, sind die krümmungsabhängige Glättung (Abschnitt 3.3) und die Kombination mit den Verdrängungsalgorithmen.

Erste Versuche zur Glättung von LO wurden von BURGHARDT (2002) mit dem konventionellen Snakes-Modell von KASS et al. (1987) unternommen: Segmentierung der LO entsprechend ihrer „Kurvigkeit“ (ihres Krümmungsverhaltens) und getrennte Glättung der Teilstücke mit jeweils konstanten Steuerparametern. Obwohl die Ergebnisse aus (karto-)graphischer Sicht recht befriedigend ausfielen, sind Modifikationen oder Alternativen in vielerlei Hinsicht möglich. So lassen sich z. B. unterschiedliche Snakes-Modelle, die Segmentierung nach Zwangs-

punkten bzw. Nichtdifferenzierbarkeitsstellen, ortsabhängige Ansätze für die äußere Energie und/oder für die Steuerparameter, ferner unterschiedliche Iterationsalgorithmen zur Lösung der anfallenden Gleichungssysteme verwenden. Die Steuerparameter zweckdienlich zu wählen, stellt sich bei jeder Snakes-Anwendung neu, denn sie beeinflussen sowohl Struktur und Kondition der Systemmatrix, mithin die Rechengeschwindigkeit, als auch die Qualität der Lösung. Entsprechend der Fülle von Ansatz- und Lösungsmöglichkeiten wurden von STEINIGER (2003) umfangreiche strukturelle Untersuchungen und numerische Tests angestellt, deren Ergebnisse hier in den Hauptzügen vorgestellt werden sollen.

Aus Platzgründen sind die aus der Snakes-Technik bekannten, hier zum Teil modifizierten Ansätze, Gleichungen und Rechenverfahren in Tabellen zusammengefasst. Ebenso wurden die Matrizen der Snakes-Iteration nicht explizit ausgeschrieben; sie stehen in (fast) allen zitierten Snakes-Arbeiten. Aus numerischen Tests an LO ist eine Bildauswahl beigegeben.

## 2 Snakes-Modelle

### 2.1 Vorbemerkungen

Die Verformung von Snakes wird durch eine geeignet definierte, kontext-abhängige äußere (externe) Energie ( $E_{ext}$ ) bewirkt, und eine den Kurven zugeordnete innere (interne) Energie ( $E_{int}$ ), welche gewisse Kurveneigenschaften beschreibt, sorgt für die Form-erhaltung. Die Gleichgewichtslage findet man (als eine von mehreren Lösungsmöglichkeiten) über ein Variationsproblem, indem die Gesamtenergie, eine Linearkombination aus äußerer und innerer Energie, minimiert wird. Die dazu äquivalenten EULER-Gleichungen werden diskretisiert und iterativ gelöst.

### 2.2 Benutzte Modelle

Die wichtigsten Beziehungen und Gleichungen der benutzten Modelle stehen in Tab. 1.

Die Ansätze für  $E_{int}$  sind in fast allen Anwendungen gleich. Bei den konventionellen Snakes steuert der Parameter  $a$  des ersten Terms die Längen-, der Parameter  $\beta$  des zweiten Terms die Wölbungsänderung. Da in  $E_{int}$  Ableitungen der Koordinaten nach der Bogenlänge bis zur 2. Ordnung vorkommen, sind die EULER-Gleichungen von 4. Ordnung. Nach Diskretisierung mit finiten Differenzen (FDM) bekommt man zwei lineare Gleichungssysteme in den gesuchten Snakes-Koordinaten  $x, y$ . Die Systemmatrix  $A_p$  ist symmetrisch für konstante  $a, \beta$ , und bleibt es auch bei ortsabhängigen  $a(s), \beta(s)$  in der von KASS et al. (1987, p. 263) angegebenen Lösung. Eine symmetrische Systemmatrix ist immer von Vorteil: Neben der Möglichkeit der CHOLESKY-Zerlegung werden unerwünschte Effekte wie Phasenverschiebung und sekundäre „Nebenzipfel“ ausgeschlossen.

Die Tangent Angle FUnction Snakes (TAFUS) wurden zu Vergleichszwecken herangezogen, weil der Parameter  $\beta$  eine vom Koordinatensystem unabhängige Kurveneigenschaft, die Krümmung  $\dot{\varphi}$  (= Änderung der Richtung nach der Bogenlänge), direkt bewertet. Im Ansatz  $E_{int}$  steuert  $a$  die Richtungs- und  $\beta$  die Krümmungsänderung. Da in  $E_{int}$  außer  $\varphi$  nur die 1. Ableitung  $\dot{\varphi}$  vorkommt, ist die EULER-Gleichung (in  $\varphi$ ) nur von 2. Ordnung und die Matrix  $A_T$  des einen linearen Ersatzsystems tridiagonal. Gleichzeitig ist  $A_T$  symmetrisch, sogar bei ortsabhängigen  $a(s), \beta(s)$ , sofern man nach Vorwärtsdifferenzen diskretisiert. Auf den ersten Blick scheint dies numerisch von großem Vorteil zu sein, doch wird der Rechenzeitgewinn von Vorarbeiten, Berechnung der Tangentenwinkelfunktion (TWF) aus den Koordinaten, und Nacharbeiten, Berechnung der Koordinaten aus der TWF, wozu eine Zusatzbedingung bezüglich der Punktbeziehung erforderlich ist, teilweise wieder aufgezehrt. Außerdem neigen die TAFUS dazu, instabil zu sein, und man muss gewisse Vorkehrungen zu ihrer Stabilisierung treffen (siehe Abschnitte 2.3, 3.3, 3.4). Wegen der nicht-linearen Beziehungen zwischen polar- und rechtwinkligen Koordinaten (vgl.  $\varphi, \dot{\varphi}$  in Tab. 1, rechts oben) sind beide Modelle

**Tab. 1:** Vergleich zweier Snakes-Modelle. Alle Größen sind Funktionen der Bogenlänge  $s$ , Punktierung bedeutet Differentiation nach  $s$ . Erläuterungen im Abschnitt 2.2.

SNAKES	TAFUS
Interne (Form-)Energie	
$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left[ a  \underline{\dot{v}} ^2 + \beta  \underline{\ddot{v}} ^2 \right]$	$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left[ a \varphi^2 + \beta \dot{\varphi}^2 \right]$
Terme: Elastizität und Zähigkeit (Glattheit)	Terme: Richtung und Krümmung
$\underline{\dot{v}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \underline{\ddot{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$	$\varphi = \arctan(\dot{y}/\dot{x})$ $\dot{\varphi} = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$
Gleichgewichtsbedingungen (EULER-Gleichungen)	
$0 = \frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial x} - a\ddot{x} + \beta x^{IV}$ $- a\dot{x} + \beta\dot{x} + 2\beta\ddot{x}$	$0 = \frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial \varphi} + a\varphi - \beta\dot{\varphi}$ $- \beta\dot{\varphi}$
(In $y$ analog; für konstante $a, \beta$ verbleibt jeweils die obere Zeile)	+ Restriktion: Snakes-Punkte mögen sich senkrecht zur Snakes-Richtung bewegen
Lineare Ersatzsysteme (Diskretisierung mit FDM)	
5-Punkte-Approximation	3-Richtungs-Approximation
$\underline{A}_p \underline{x} = \underline{b}_x, \underline{A}_p \underline{y} = \underline{b}_y, \underline{A}_p$ pentadiagonal	$\underline{A}_T \varphi = \underline{b}_\varphi, \underline{A}_T$ tridiagonal

einschließlich ihrer Steuerparameter *nicht* direkt vergleichbar.

### 2.3 Filtereigenschaften

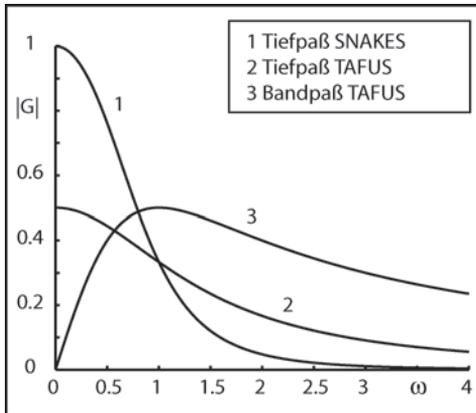
Die gefilterte Linie soll der ungefilterten in ihrem Verlauf weitgehend folgen, aber glatter als jene sein. Die Glättung erzielt man mit einer geeigneten äußeren Einwirkung ( $E_{\text{ext}}$ ). Analog zur Approximation von Messwertreihen mit Snakes (BORKOWSKI et al. 1997, BORKOWSKI & MEIER 1999, BORKOWSKI 2004) setze man  $E_{\text{ext}}$  proportional zu den Residuen zwischen ungefilterten ( $x_0, y_0; \varphi_0$ ) und gefilterten Signalen ( $x, y; \varphi$ ) bzw. ihren Quadraten an (Tab. 2, oben). In den resultierenden EULER-Gleichungen stehen dann die Eingangsgrößen auf der rechten Seite, und man kann die Übertragungs-(Verformungs-)Eigenschaften solcher Systeme untersuchen. Hier beschränken wir uns exemplarisch auf Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (Tab. 2, Mitte) und stationäre Filter. Im Allgemeinfall in-stationärer Filter sind die Rechnungen viel aufwändiger (MEIER 2000b, BORKOWSKI & KELLER 2002).

Die Durchlasscharakteristiken (Tab. 2, unten) gewinnt man mithilfe von Pseudo-Differentialoperatoren (TERZOPOULOS 1986, BORKOWSKI & KELLER 2002) oder – gleichwertig – mittels Eingangs-Ausgangs-Analyse (MEIER & KELLER 1990, MEIER 2000a, b). Obwohl in Tab. 2 bei beiden Modellen gleiche Symbole ( $a, \beta; \omega$ ) stehen und die Charakteristiken in Abb. 1 gemeinsam dargestellt sind, sei ausdrücklich bemerkt, dass es sich um *unterschiedliche*, nicht direkt vergleichbare Spektralbereiche handelt.

Glättende Snakes realisieren einen phasen- und maßstabstreuen Tiefpass mit dominierendem Einfluss von  $\beta$  auf großen  $\omega$  (Feinstrukturen) und liefern immer eine glatte Kurve. Anders ist die Situation bei TAFUS. Der entsprechende Tiefpass ist nicht maßstabstreu: Wegen  $G_\varphi(0) < 1$  wird auch im langwelligen Bereich geglättet. Selbst wenn man (heuristisch) die rechte Seite  $\varphi_0$  mit  $(1 + a)$  bewichtet,  $G_\varphi(0) = 1$ , wird immer noch zu stark geglättet, so dass – wie Experimente zeigten – die Linien völlig verformt und die Ergebnisse unbrauchbar sind. Dieser latenten Instabilität kann man mit einem alternativen Ansatz entgegenwirken.

**Tab. 2:** Vergleich der Filtereigenschaften zweier Snakes-Modelle mit speziellen Ansätzen für die externe Energie und stationären Eingangsgrößen. Diskussion im Abschnitt 2.3, vgl. auch Abb. 1.

SNAKES		TAFUS	
Externe Energie			
$E_{ext} = \frac{1}{2}(x - x_0)^2$	$\frac{\partial E_{ext}}{\partial x} = x - x_0$	a) $E_{ext} = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)^2$	$\frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} = \varphi - \varphi_0$
(In $y$ analog)		b) $E_{ext} = (\varphi_0 - \varphi)\dot{\varphi}_0$	$\frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} = -\dot{\varphi}_0$
EULER-Gleichungen (konstante $a, \beta$ )			
$x - a\ddot{x} + \beta x^{IV} = x_0$	a)	$(1 + a)\varphi - \beta\ddot{\varphi} = \varphi_0$	
(In $y$ analog)	b)	$a\varphi - \beta\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$	
Durchlasscharakteristiken			
$G_{x,y}(\omega) = \frac{1}{1 + a\omega^2 + \beta\omega^4}$	a)	$G_{\varphi}^{TP}(\omega) = \frac{1}{(1 + a) + \beta\omega^2}$ ,	
$G_{x,y}(0) = 1$		$G_{\varphi}(0) = 1/(1 + a) < 1$	
mit $j^2 = -1 \mapsto$	b)	$G_{\varphi}^{BP}(j\omega) = \frac{j\omega}{a + \beta\omega^2}, G_{\varphi}(0) = 0$	



**Abb. 1:** Durchlasscharakteristiken aus Tab. 2 mit  $\alpha = \beta = 1$ . Diskussion in Abschnitt 2.3.

Man setze  $E_{ext}$  gleich den mit der Eingangskrümmung  $\dot{\varphi}_0$  bewichteten Residuen der Richtungen an, d. h. große Krümmungen – große äußere Einwirkungen – starke Glättung und umgekehrt. In der EULER-Gleichung steht nun rechts  $\dot{\varphi}_0$  anstelle  $\varphi_0$ , dem Tiefpass ist ein Hochpass nachgeschaltet, sodass insgesamt ein Bandpass mit Phasenverschiebung  $\pi/2$  entsteht. Brauchbar ist ein solcher Ansatz nur dann, wenn man im

kurzwelligen Bereich (schwach) glätten möchte und im iterativen Algorithmus eine geeignete Abbruchschranke vorsieht (vgl. Abschnitt 3.2). Man bleibt – bildlich gesprochen – rechts des Maximums von  $|G_{\varphi}(j\omega)|$ , Kurve (3) in Abb. 1, und die Phasenverschiebung  $\pi/2$  ist kaum wirksam.

### 3 Glättungsalgorithmen

#### 3.1 Iterationsvorschriften

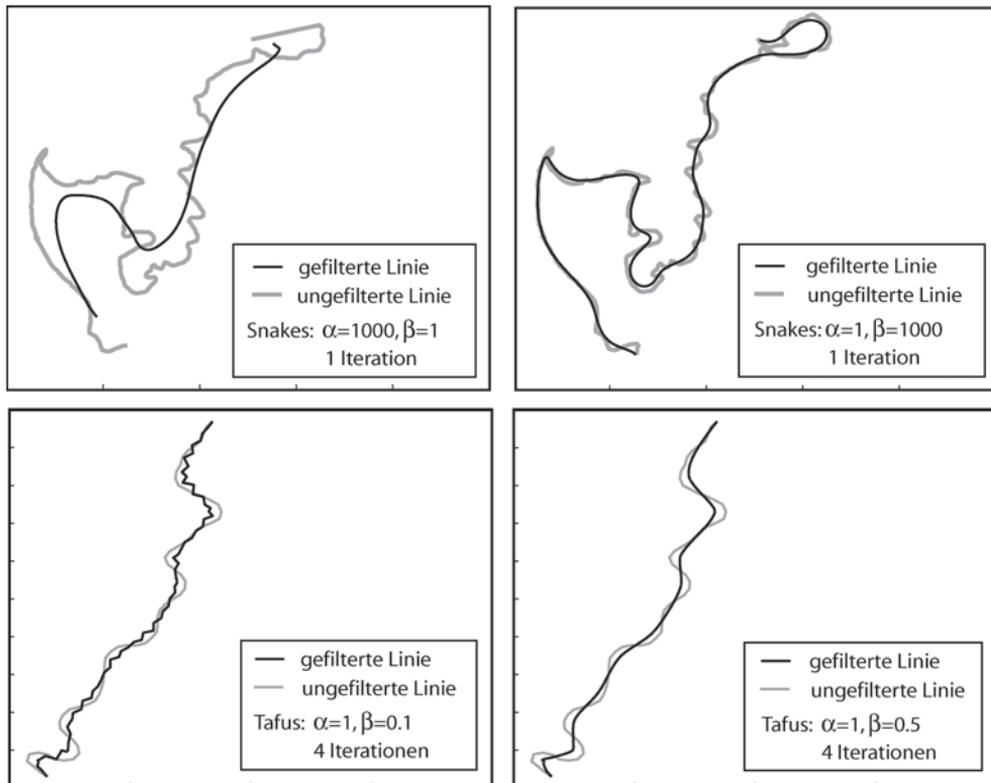
Die linearen Ersatzsysteme (Tab. 1, unten) sind bekanntermaßen schlecht konditioniert. Man iteriert deshalb seit KASS et al. (1987) in allen Snakes-Anwendungen mit regularisierten Matrizen  $B_p := A_p + \lambda I$  und  $B_T := A_T + \lambda I$ . Daran haben auch die TAFUS mit tridiagonaler, deutlich besser konditionierter Matrix  $A_T$  gegenüber der pentadiagonalen  $A_p$  (BORKOWSKI et al. 1999) nichts geändert.

Bei Snakes bieten sich zwei Möglichkeiten an:

- (1) Berechnung der Koordinaten  $x^t, y^t$  im Schritt  $t$  aus den vorhergehenden  $x^{t-1}, y^{t-1}$  und den Ableitungen  $E_x^{t-1}, E_y^{t-1}$  von  $E_{ext}$  aus dem vorhergehenden Schritt  $t - 1$ .

**Tab. 3:** Iterationsvorschriften zur Lösung diskretisierter EULER-Gleichungen zweier Snakes-Modelle bezüglich Glättung. Erläuterungen im Abschnitt 3.1

SNAKES	TAFUS
$\underline{x}^t = \lambda \underline{B}_p^{-1} \underline{x}^{t-1}$ $\underline{B}_p := \underline{A}_p + \lambda \underline{I}$ (In $\underline{y}$ analog) (BURGHARDT 2002)	$\underline{\varphi}^t = \underline{\varphi}^{t-1} + \underline{B}_T^{-1} \Delta \underline{\varphi}^{t-1}$ $\underline{B}_T := \underline{A}_T + \lambda \underline{I}$ (BORKOWSKI et al. 1999, STEININGER 2003)

**Abb. 2:** Snakes-Glättung (oben) und Tafus-Glättung (unten) mit unterschiedlichen Parametern. Negativbeispiele links, akzeptable Ergebnisse rechts. Diskussion im Abschnitt 3.3.

(2) Diskretisiert man die *spezielle* EULER-Gleichung in Tab. 2 (Mitte, links), so unterscheidet sich die Matrix  $\underline{A}_p$  von der herkömmlichen insofern, als alle Elemente der Hauptdiagonalen um den Wert Eins erhöht sind. Es entsteht also die regularisierte Matrix  $\underline{B}_p$  mit dem Standardwert  $\lambda = 1$  *a priori* (unter (1) erst *a posteriori*), und man iteriert mit den Eingangskoordinaten  $x^{t-1}, y^{t-1}$  aus dem Schritt  $t-1$ , vgl. Tab. 3 (oben links).

Diese Vorschrift folgt auch aus einer konstanten äußeren Einwirkung  $E_{ext} = const.$  Mit  $\partial E_{ext}/\partial x = 0, \partial E_{ext}/\partial y = 0$  werden die EULER-Gleichungen homogen („degenerierte Snakes“). Aus der Lösungsschar wird iterativ mithilfe einer Abbruchschranke (vgl. Abschnitt 3.2) jene gewonnen, die einen gewünschten Glättungsgrad realisiert.

Spätestens an dieser Stelle sieht man, dass es sich um ein Mehrpunktmittel handelt:

**Tab. 4:** Krümmungsabhängige interne Energie zweier Snakes-Modelle am Elementarbeispiel eines (oberen) Halbkreises mit Bogenlänge  $s$ , Radius  $r$  und Krümmung  $\phi = 1/r$ .

Parameterdarstellung	Tangentenwinkelfunktion
$x(s) = r \cos(s/r), y(s) = r \sin(s/r)$ $\dot{x}(s) = -\sin(s/r), \dot{y}(s) = \cos(s/r)$ $\ddot{x}(s) = -\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), \ddot{y}(s) = -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right)$	$\varphi(s) = \frac{s}{r} - \frac{\pi}{2}, s \in (0, \pi r)$ $\dot{\varphi}(s) = \frac{1}{r}, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
SNAKES	TAFUS
$E_{\text{int}} \sim [a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \beta(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)]$ $= a + \beta/r^2 = a + \beta\dot{\varphi}^2$	$E_{\text{int}} \sim [a\varphi^2 + \beta\dot{\varphi}^2]$ $= [a(s - \pi/2\dot{\varphi})^2 + \beta]\dot{\varphi}^2$

Die neuen Snakes-Koordinaten sind das Produkt einer Zeile aus  $\mathbf{B}_p^{-1}$  mit dem Vektor der alten Koordinaten. Es ist zu fragen, warum man Linien mit Snakes glätten sollte, wenn einfachere Glättungsfilter das Gleiche leisten (SCHWARZBACH 1995). Argumente, die für Snakes sprechen, sind die krümmungsabhängige Glättung (Abschnitt 3.3) und die Kombination mit Verdrängungsalgorithmen.

### 3.2 Abbruchkriterien

Um unterschiedliche Glättungsgrade zu realisieren, braucht man ein Abbruchkriterium im iterativen Algorithmus, beim TAFUS-Bandpass (Tab. 2, Abb. 1) bereits aus filtertechnischen Gründen. Um die Glattheit einer Kurve zu beurteilen bzw. zu messen, gibt es verschiedene qualitativ gleichwertige Größen.

BURGHARDT (2002) beurteilte die Glattheit (zum Zwecke der Segmentierung) nach der Anzahl der Schnittpunkte zwischen der ungefilterten und der gefilterten Kurve je Längeneinheit. Bei PLAZANET et al. (1998) wird die Anzahl der Wendepunkte, bezogen auf die Länge der Linie, verwendet.

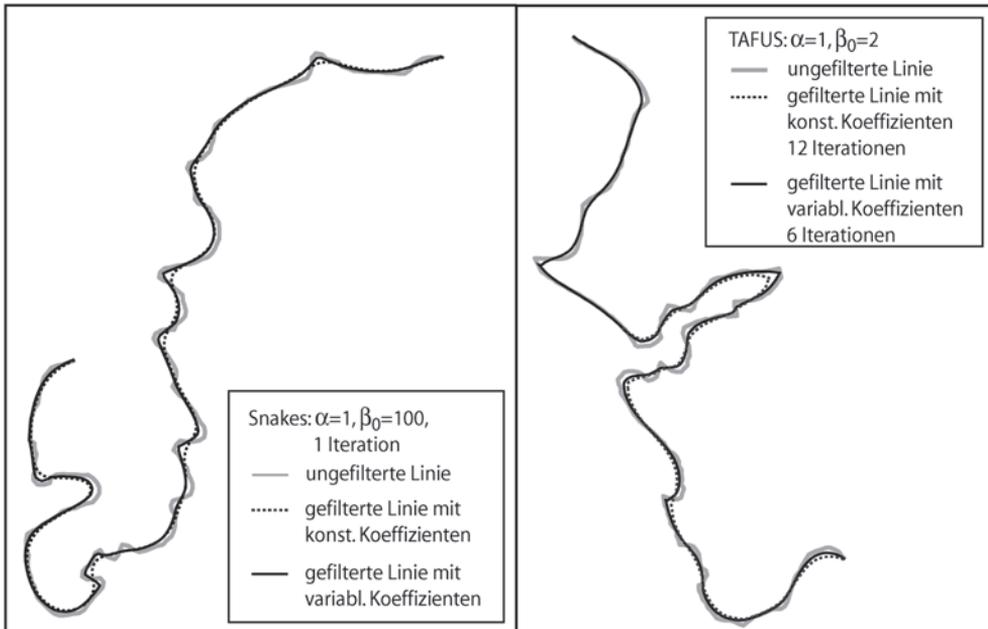
In unseren numerischen Tests wurde die Varianz  $\sigma_{\Delta\varphi}^2$  der Richtungsänderungen  $\Delta\varphi_i := \varphi_{i+1} - \varphi_i$  in Polygon-Snakes als diskretes Pendant zur Krümmung  $\dot{\varphi}(s)$  favorisiert. An LO mit Mäandern oder tiefen Ein- und Ausbuchtungen ist  $\varphi(s)$  bezüglich der 2. Momente nicht stationär; die  $\varphi_i$  weisen Sprünge auf. In Strenge braucht man robus-

te Varianz-Schätzer. Für unseren Zweck reicht es aus, extreme Werte auszuschließen.

### 3.3 Steuerparameter

Die Wirkung unterschiedlicher Steuerparameter beim Verdrängen von LO wurde von BADER (2001) ausführlich untersucht: Insgesamt reagieren die LO wenig empfindlich auf Veränderliche  $a, \beta$ . Man muss sich vor Augen halten, dass Feinheiten je nach Darstellungsmaßstab kaum sichtbar sind. Das Gleiche trifft beim Glätten zu, wenn man sich nur vor extremen Werten hütet. Wie sich letztere auswirken können, wird an je einem Beispiel für Snakes und TAFUS gezeigt (Abb. 2).

Setzt man im Snakes-Beispiel  $\beta \ll a$  (Abb. 2, oben links), ist der Widerstand gegen Wölbungsänderung zu gering. Bereits nach *einem* Iterationsschritt entsteht eine glatte Kurve, die nicht mehr dem ursprünglichen Verlauf folgt. Dagegen ist für  $\beta \gg a$  der Widerstand gegen Wölbungsänderung groß und die geglättete Kurve folgt der ursprünglichen (Abb. 2, oben rechts); hier ist der große Wert von  $\beta$  zulässig. Die Durchlasscharakteristik des Tiefpasses (Abb. 1, Kurve 1) kann zur Erklärung *nicht* dienen, da die ungefilterte Linie bezüglich ihres Verlaufs hochgradig instationär ist. Dagegen kann man am TAFUS-Beispiel mit gleichmäßigem Kurvenanstieg (Abb. 2, unten) die Charakteristik des Bandpasses (Abb. 1, Kurve 3) heranziehen: Im Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  wird  $|G_\varphi(j\omega)| = \omega/a$ , d. h. eine Gerade mit



**Abb. 3:** Snakes-Glättung (links) und TAFUS-Glättung (rechts) mit konstanten und variablen Steuerparametern bzw. Koeffizienten der Systemmatrizen. Diskussion im Abschnitt 3.3.

Anstieg  $1/a$ , woraus Glättung (Aufrauung) im langwelligen (kurzwelligen) Bereich folgt. Die Defekte sind in Abb. 2 (unten links) gut zu sehen. Sie verschwinden, wenn  $\beta/a \geq 1/2$ . Jedoch sollte  $\beta$  nicht zu groß sein, sonst können TAFUS leicht instabil werden.

Reale LO weisen häufig stark wechselnde Krümmungen auf (Abb. 2 bis 4), und es liegt nahe, krümmungsabhängig zu glätten. Es gibt verschiedene Möglichkeiten,  $a = a(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  ortsabhängig anzusetzen. Eine davon wird erläutert.

Das einfachste Kurven-Modell ist der Halbkreis, parametrisiert nach Koordinaten für die Snakes oder nach der TWF für TAFUS (Tab. 4). Wegen  $\dot{\varphi} = const$ , jedoch  $\varphi = \varphi(s)$  ist  $E_{int} = const$  bei Snakes, ortsabhängig bei TAFUS. Daher kann man für Snakes  $a = const$ ,  $\beta = \beta_0 \dot{\varphi}_0^2 \mapsto \beta_0 \Delta \varphi_0^2$ , und für TAFUS  $a = a_0 \varphi_0^2$  und  $\beta$  wie angegeben ansetzen. In numerischen Experimenten hat sich  $a = 1, \beta_0 \geq 1$  in beiden Modellen als ausreichend erwiesen.

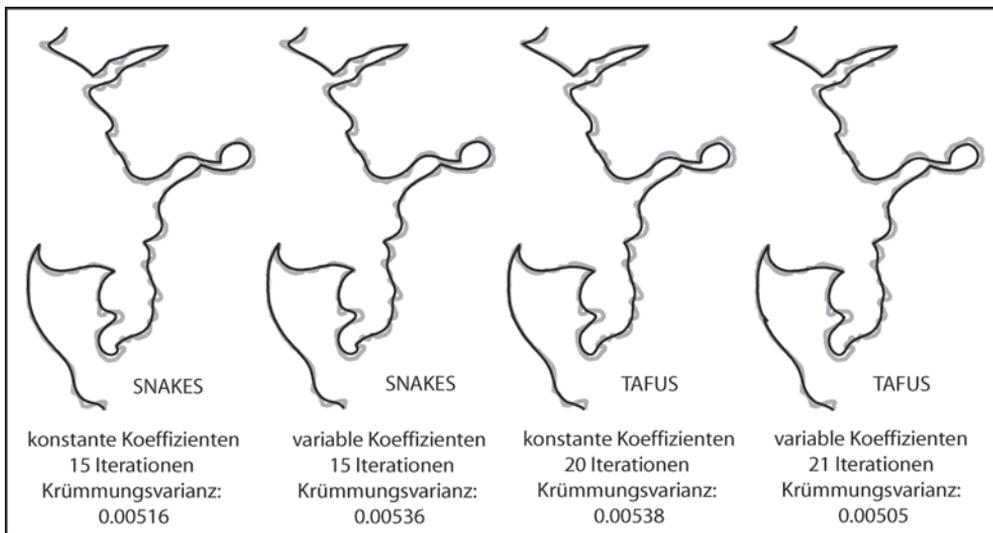
Im Snakes-Beispiel Abb. 3 (links) wurde mit  $\beta_0 \gg a$  bereits in *einem* Rechenschritt

die glatte Kurve erzeugt. Die abschleifende Wirkung mit konstanten  $a, \beta$  ist bei variablem  $\beta$  wenigstens teilweise an starken Ein- und Ausbuchtungen kompensiert. Bei TAFUS (Abb. 3, rechts) darf man aus Stabilitätsgründen  $\beta_0$  nicht zu groß wählen und nähert sich in kleinen Schritten einer brauchbaren Lösung an.

Insgesamt sind die Ergebnisse mit ortsabhängigem  $\beta$  so überzeugend nicht, dass sie den Mehraufwand, Neuberechnung der Systemmatrizen nach jedem Iterationsschritt, rechtfertigen würde. Als effektiver bezüglich Formerhaltung und Rechenzeit erweist sich die Segmentierung.

### 3.4 Segmentierung und Skalierung

Natürliche, aber auch künstliche LO besitzen häufig Nichtdifferenzierbarkeitsstellen oder Zwangspunkte, die erhalten bleiben müssen (vgl. Abb. 3, rechts und Abb. 4). Als Alternative zur ortsabhängigen Steuerung bietet sich die Zerlegung der Kurve in Teilstücke in diesen Punkten an. Zur Segmen-



**Abb. 4:** Vergleich der Glättungsverfahren am Beispiel *Louisiana's Gulf Coast* (dünn hinterlegt) mit konstanten ( $\alpha = \beta = 1$ ) und variablen Steuerparametern ( $\alpha = \beta_0 = 1$ ) bzw. Koeffizienten der Systemmatrizen sowie automatischer Segmentierung. Diskussion in Abschnitt 3.4.

tierung braucht man geeignete Kriterien, z. B. soll  $P_i$  ein Teilungspunkt sein, wenn  $|\Delta\varphi_i| \geq \pi/2$  in  $P_i$  bei Kurven mit Knickpunkten oder  $|\Delta\varphi_i| \geq \pi/3$  an stetig differenzierbaren Kurven mit lokal großen Krümmungen. Um im letztgenannten Fall den glatten Übergang von Segment zu Segment sicherzustellen – filtertechnisch gesprochen: Randdefekte auszuschließen –, empfiehlt es sich, ggf. einige Punkte in Randnähe im Teilungspunkt zu spiegeln.

Die Segmente werden getrennt bearbeitet, d. h. jeweils mehrere kleine Systeme anstelle eines großen gelöst. Diese Prozedur erhält nicht nur typische Formen (selbst mit konstanten  $a, \beta$ ) sondern ist auch numerisch schneller: Die Rechenzeit geht teilweise bis auf 20 Prozent zurück und bringt uns dem Ziel der Echtzeitleistung nahe.

Im Beispiel Abb. 4, Glättung einer Küstenlinie mit beiden Modellen sowie mit konstanten und variablen Steuerparametern, erkennt man kaum Qualitätsunterschiede. Außerdem sind die Parameter  $a = \beta = 1$  bzw.  $a = \beta_0 = 1$  völlig ausreichend. Ohne Not sollte man von diesen Werten nicht abweichen, denn sie sind auch beim Verdrän-

gen von LO Standard und erleichtern es, beide Operationen effektiv zu kombinieren.

Die diskreten Filterkoeffizienten skalieren man zweckmäßig so, dass ihre Summe Eins ergibt. Dann ist der Snakes-Tiefpass mit  $G_{x,y}(0) = 1$  maßstabstreu, d. h. lange Wellen (Großformen) bleiben erhalten.

Bleibt nur noch, die Robustheit der Algorithmen bezüglich des Stützpunktabstandes zu betrachten. Die konventionellen Snakes-Lösungen sind beim Verdrängen und Glätten mit nicht-äquidistanten Daten stabil. TAFUS reagieren empfindlicher. Zu ihrer Stabilisierung kann man gleichabständige Punkte interpolieren (BORKOWSKI & MEIER 2001) oder – als einfache Alternative – sehr dicht liegende Punkte löschen (STEINIGER 2003).

#### 4 Hauptergebnisse und Schlussfolgerungen

Die Linienglättung ist mit verschiedenen Verfahren möglich. Gute kartographische Qualität gewährleisten z. B. formtreue Glättungsfilter (SCHWARZBACH 1995). Im Hin-

blick auf kombinierte Glättungs-Verdrängungs-Operationen in einem einheitlichen Konzept bzw. kartographischer Software mit klarer Struktur bevorzugen wir Snakes-Lösungen: Ihre ortsunabhängige Steuerung (mit Standardwerten der Parameter  $\alpha = \beta = 1$ ) entsprechen einem reinen, die ortsabhängige Steuerung (speziell mit krümmungsabhängigem  $\beta$ ) einem formtreuen Glättungfilter. Indessen lohnt letztere nur an stetig differenzierbaren Kurven. An solchen mit Knickstellen erweist sich die Segmentierung nach Krümmungskriterien sowohl bezüglich der Qualität als auch der Rechenzeit als sehr vorteilhaft. Die TAFUS-Lösungen sind nur mit stabilisierenden Maßnahmen den Snakes-Lösungen ebenbürtig. Sie bringen (trotz tridiagonaler Systemmatrix) wegen notwendiger Vor- und Nacharbeiten nicht die erhofften Rechen-vorteile.

Die Glättungsalgorithmen sind gründlich erprobt, sodass ihrer Aufnahme in kommerzielle Software nichts im Wege steht. Das Gleiche darf man, nach bisherigen Tests zu urteilen, auch für kombinierte Glättungs-Verdrängungs-Operationen erhoffen. Aus Platzgründen müssen diese einer gesonderten Arbeit vorbehalten bleiben.

## Dank

Es ist den Verfassern eine angenehme Pflicht, den Herren Dr.-Ing. A. BORKOWSKI, Wrocław, und Dr.-Ing. D. BURGHARDT, Zürich, für ihr stetes Interesse am Fortgang der Arbeiten, die hilfreichen Vorschläge zur Verfahrensausgestaltung samt Teststrategien, schließlich für die kritische Durchsicht der Manuskriptentwürfe herzlich zu danken.

## Literatur

- BABAUD, J., WITKIN, A.P., BAUDIN, M. & DUDA, R.O., 1986: Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scale-Space Filtering. – *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **8** (1): 26–33.
- BADER, M., 2001: Energy Minimization Methods for Feature Displacement in Map Generalization. – Ph.D. thesis, Dept. of Geogr., Univ. of Zürich.
- BORKOWSKI, A., 2004: Modellierung von Oberflächen mit Diskontinuitäten. – Deutsche Geodätische Kommission, R.C. H. 575, München.
- BORKOWSKI, A., BURGHARDT, D. & MEIER, S., 1997: Zur optimalen Approximation von Höhenprofilen. – *Österr. Z. Verm. & Geoinf.* **85**: 281–285.
- BORKOWSKI, A., BURGHARDT, D. & MEIER, S., 1999: A fast snakes algorithm using the tangent angle function. – *IAPRS*, Vol. 32, Part 3–2W5: 61–65.
- BORKOWSKI, A. & KELLER, W., 2002: Von stationären und instationären Filtern. – In: Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. habil. SIEGFRIED MEIER. – TU Dresden, Inst. f. Planetare Geodäsie, 53–65.
- BORKOWSKI, A. & MEIER, S., 1999: Versuche zur robusten Snakes-Approximation von Höhenprofilen mit Diskontinuitäten. – *Photogrammetrie, Fernerkundung, Geoinformation* **1999**: 381–390.
- BORKOWSKI, A. & MEIER, S., 2001: Robustification of the Tangent Angle Function Snakes. – *Photogrammetrie, Fernerkundung, Geoinformation* **2001**: 129–135.
- BURGHARDT, D., 2001: Automatisierung der kartographischen Verdrängung mittels Energieminimierung. – Deutsche Geodätische Kommission, R.C. H. 536, München.
- BURGHARDT, D., 2002: Glättung mit Snakes. – In: Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. habil. SIEGFRIED MEIER. – pp. 67–70, TU Dresden, Inst. f. Planetare Geodäsie.
- BURGHARDT, D. & MEIER, S., 1997: Cartographic displacement using the snakes concept. – In: FÖRSTNER, W. & PLÜMER, L. (eds.): *Semantic Modeling for the Acquisition of Topographic Information from Images and Maps*. – pp. 59–71, Birkhäuser Verlag, Basel.
- KASS, M., WITKIN, A. & TERZOPOULOS, D., 1987: Snakes: Active contour models. – *Internat. J. Comp. Vision* **1** (4): 321–331.
- MCMMASTER, R.B., 1989: The integration of simplification and smoothing algorithms in line generalization. – *Cartographica* **24** (2): 74–111.
- MEIER, S., 2000a: Die Snakes-Approximation als Hilfsmittel der Geodatenverarbeitung. – *Allg. Verm. Nachr.* **2**: 50–57.
- MEIER, S., 2000b: Zur Qualität snakes-approximierter Höhenprofile mit Diskontinuitäten. – *Photogrammetrie, Fernerkundung, Geoinformation* **2000**: 399–409.
- MEIER, S. & BURGHARDT, D., 1997: Kartographische Verdrängung nach Extremalprinzipien. – *Z. f. Vermessungswesen* **122** (8): 377–386.

- MEIER, S., 2001: Generalisieren nach physikalischen Prinzipien. – Kartogr. Bausteine **19**: 52–57.
- MEIER, S. & KELLER, W., 1990: Geostatistik. Einführung in die Theorie der Zufallsprozesse. – Akademie-Verlag, Berlin, Springer-Verlag, Wien.
- PLAZANET, C., BIGOLIN, N. M. & RUAS, A., 1998: Experiments with Learning Techniques for Spatial Model Enrichment and Line Generalization. – GeoInformatica **2** (4): 315–333.
- SCHWARZBACH, F., 1995: Untersuchungen zur rechnergestützten Linienglättung. – Kartogr. Bausteine **10**.
- STEINIGER, ST., 2003: Vergleichende Untersuchungen zur Linienglättung mit Snakes und Wavelets. – Diplomarbeit, TU Dresden.
- TERZOPOULOS, D., 1986: Regularisation of inverse visual problems involving discontinuities. – IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-**8** (4): 413–423.
- Anschriften der Verfasser:
- Prof. Dr.-Ing. habil. SIEGFRIED MEIER  
Technische Universität Dresden  
Institut für Planetare Geodäsie  
D-01062 Dresden  
Tel.: +49-351-463-33416  
Fax: +49-351-463-37063  
e-mail: meier@ipg.geo.tu-dresden.de
- Dipl.-Ing. STEFAN STEINIGER  
Universität Zürich-Irchel  
Geographisches Institut  
CH-8057 Zürich  
Tel.: +41-1-6355252  
Fax.: +41-1-6356848  
e-mail: sstein@geo.unizh.ch
- Manuskript eingereicht: Juli 2004  
Angenommen: Januar 2005