

# Eine Gegenüberstellung von Reliefapproximationen mithilfe von Verfahren der Ausgleichsrechnung und der Spline-Theorie

OLGA WÄLDER, Dresden

**Keywords:** quality measures, relief approximation, wavelet-splines

**Zusammenfassung:** Das Ziel dieser Arbeit ist sowohl ein theoretischer als auch ein empirischer Qualitätsvergleich von Reliefapproximationen bestimmter analytischer Formen und mit verschiedenen Grundannahmen. Die klassische Ausgleichung liefert die beste Lösung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate. Die so genannte Interpolationsforderung wird dabei normalerweise nicht erfüllt, d. h. an bestimmten Stützpunkten gemessene Werte werden nicht unbedingt wiedergegeben. Die Spline-Theorie bietet einige, die Interpolationsforderung erfüllende Lösungen des Approximationsproblems. Es ist interessant, zu vergleichen, inwieweit diese beiden Lösungen „stabil“ im Sinne der Qualität der Reliefapproximation sind, wenn das Gitter der Messpunkte, die in die ursprüngliche Berechnung der Approximationskoeffizienten einbezogen wurden, durch zusätzliche Messwerte erweitert wird. In dieser Arbeit werden sowohl theoretische als auch empirische Qualitätsmaße präsentiert und die Ergebnisse diskutiert.

**Summary:** *A comparison of relief approximations using methods of adjustment computation and spline-theory.* The aim of this paper is a theoretical as well as an empirical comparison of the quality of relief approximations of special analytical forms and with different basic assumptions. The classical least squares method gives an optimal solution in the well known sense. The so called interpolation condition is not fulfilled by the way: the measured values are not equal to the theoretical values obtained at the same points. The spline theory leads to some solutions of the approximation problem, which meet the interpolation condition. It is interesting to compare the quality of these both approaches for the case, if the basic grid of the measured values, which are considered in the preceding calculation of coefficients of the approximation, is enlarged by including additional measured values. In this paper some theoretical and empirical quality measures are presented and the final results are discussed.

## 1 Kurze Darstellung zweier Lösungswege eines Approximationsproblems

*Gegeben:* Höhenmessungen  $Z_i, i = 1 \dots N^2$  auf einem Gitter  $N \times N$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit und nur zum Zweck der Vereinfachung der Form weiterer Relationen wird vorausgesetzt, dass die Rechts- und Hochwerte im Intervall  $[0,1]$  liegen, siehe WÄLDER & BUCHROITHNER (2003, 2004), WÄLDER (2005) für Details dieser Transformation bzw. der Rücktransformation. Außerdem wird angenommen, dass

$$N = 2^{k-1} + 1, k = 1, 2 \dots \quad (1)$$

*Gegeben* wird eine zweidimensionale, erweitert-polynomiale Georeliefapproximation der Form (4) (weiter im Text mit dem Begriff *polynomiale Approximation vom Grad k* abgekürzt) mit  $3k + 1$  unbekanntem Koeffizienten, d. h. die Komponenten des Vektors  $\vec{a}$  sollen optimal bestimmt werden, siehe (4) und (5):

$$\vec{a}: z = z(x, y) = P(x, y, \vec{a}) \quad (2)$$

Zur Lösung dieses Problem können mehrere Lösungswege führen, die von zusätzlichen Annahmen abhängen.

Wenn die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten  $\vec{a}$  für die polynomiale Georeliefdarstellung kleiner als die Anzahl der Messungen ist, hat man ein *klassisches Ausgleichsproblem*, das mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden kann. Hier muss die so genannte *Interpolationsforderung* (3) nicht erfüllt werden.

$$z(x_i, y_i) = Z_i, \quad i = 1 \dots N^2. \quad (3)$$

Auf weitere Details und auf die Vor- und Nachteile dieses in der wissenschaftlichen Literatur oft beschriebenen und vielseitig angewendeten Verfahrens soll hier verzichtet werden. Zur Vertiefung in diese Thematik sei beispielsweise auf SCHWARZ (1988), NIEMEIER (2002) und REIßMANN (1976) hingewiesen.

Eine etwas andere Vorgehensweise kennt man aus der *Spline-Theorie*. Hier kann zwar grundsätzlich von der gleichen Anzahl der Koeffizienten in der polynomialen Darstellung (2) ausgegangen werden, man variiert dafür aber diese Koeffizienten in lokalen Bereichen (Gitterzellen in unserem Fall), um die Interpolationsforderung (3) zu erfüllen.

In früheren Untersuchungen der Autorin wurde eine funktionale Georeliefapproximation mittels spezieller „Wellen-Strukturen“ bereits hergeleitet, siehe WÄLDER & BUCHROITHNER (2004), WÄLDER (2005). Die Anwendung der hierzu entwickelten Algorithmen auf so genannten *Wavelet-Splines* wurde für reale Georeliefe demonstriert, siehe WÄLDER, KRAINER & MOSTLER (2004). Die Grundidee der verwendeten Georeliefapproximation liegt in der sequentiellen Ableitung der analytischen Gleichung in (4):

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= a_0 + a_1 f_1(x) + b_1 f_1(y) + \\ &\quad c_1 f_1(x) f_1(y) \\ P_2(x, y) &= P_1(x, y) + \\ &\quad a_2(x, y) f_2(x) + b_2(x, y) f_2(y) + \\ &\quad c_2(x, y) f_2(x) f_2(y) \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P_k(x, y) &= P_{k-1}(x, y) + \\ &\quad a_k(x, y) f_k(x) + b_k(x, y) f_k(y) + \\ &\quad c_k(x, y) f_k(x) f_k(y) \\ k &= 2, 3 \dots \end{aligned}$$

wobei mit  $f_k(\cdot)$ ,  $k = 1, 2 \dots$  spezielle Wavelet-Funktionen oder die so genannten *Basis-Funktionen eines Wavelet-Splines* bezeichnet werden. Diese Funktionen können eine sinusoidale, zickzack-förmige oder polynomiale Form aufweisen, siehe WÄLDER (2005). Die Koeffizienten  $a, b, c$  sind Amplituden, die für lokale Bereiche individuell angepasst werden. Für den Koeffizientenvektor dieser Approximation gilt in solchen Bereichen:

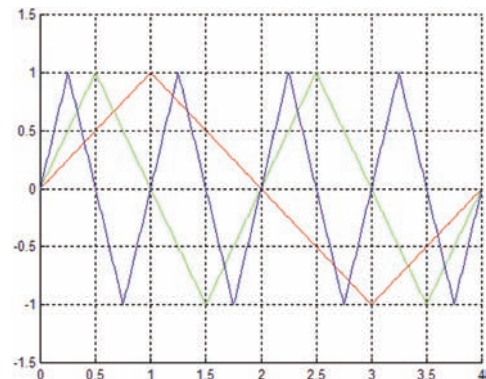
$$\vec{a} = (a_0 \ a_1 \ b_1 \ c_1 \ \dots \ a_k \ b_k \ c_k)^T \quad (5)$$

$$k = 1, 2 \dots$$

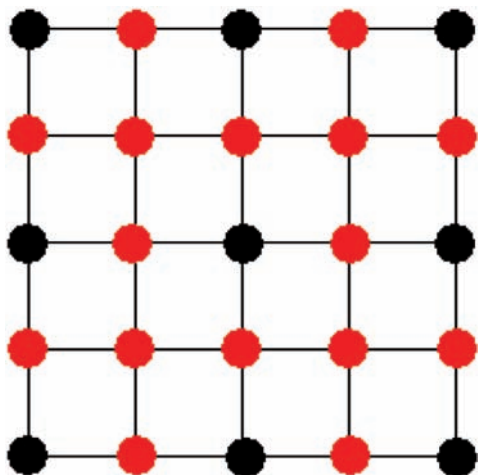
Der Parameter  $k$  beschreibt somit den Schritt, die Tiefe, den sogenannten *Grad der Approximation* auf einem Gitter von Messwerten.

Eine ausführliche Beschreibung verschiedener Verallgemeinerungen des Modells (4) sowie ihre praxisbezogenen Anwendungen können WÄLDER & BUCHROITHNER (2004) und WÄLDER (2005) entnommen werden. Hier soll dem nicht näher nachgegangen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich zickzack-förmige Wavelet-Funktionen (6) benutzt, um die weiteren Ausführungen möglichst zu vereinfachen. Abb. 1



**Abb. 1:** Zickzackförmige Basis-Funktionen eines Wavelet-Splines (rot für  $k = 1$ , grün für  $k = 2$  und blau für  $k = 3$ ).



**Abb. 2:** Prinzip der Gittererweiterung von  $k = 2$  (nur schwarze Gitterpunkte) zu  $k = 3$  (schwarze und rote Gitterpunkte).

veranschaulicht den Verlauf dreier solcher Funktionen.

$$f_k(t) = \begin{cases} 2^{k-1}t^*, & t^* \in I_1 \\ 2^{k-1} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{k-2} - t^* \right), & t^* \in I_2 \\ 2^{k-1} \left( t^* - \left( \frac{1}{2} \right)^{k-3} \right), & t^* \in I_3 \end{cases}$$

mit  $t^* = \text{mod } \binom{1}{2}^{k-3}(t), t = x, y$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[ 0, \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1} \right] \\ I_2 &= \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1}, \left( \frac{1}{2} \right)^{k-2} + \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1} \right] \\ I_3 &= \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{k-2} + \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1}, \left( \frac{1}{2} \right)^{k-3} \right] \end{aligned} \tag{6}$$

$k = 1, 2 \dots$

Nun soll die Approximation vom Grad  $k$  auf einem  $N \times N$ -Gitter,  $N = 2^{k-1} + 1$ , durchgeführt werden. In den in den Abschnitten 2 und 3 durchgeführt Untersuchungen soll die folgende Frage beantwortet werden: Wie genau ist diese Approximation (wie „stabil“ bleibt sie) für ein *erweitertes*

Gitter mit  $N = 2^k + 1$  für verschiedene Approximationsansatze? Abb.2 veranschaulicht eine derartige Erweiterung eines Gitters.

## 2 Theoretische Grundlagen beider Lösungswege

Wir gehen in diesem Abschnitt von einem ursprüngliches  $N \times N$ -Gitter mit  $N = 2^{k-1} + 1$  und einer polynomialen Approximation vom Grad  $k$  (mit  $3k + 1$  Koeffizienten) aus, siehe (2) und (4).

### 2.1 Die Methode der kleinsten Quadrate

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\underline{F}^k = \begin{bmatrix} \vec{f}_1^T \\ \dots \\ \vec{f}_{N^2}^T \end{bmatrix} = [\vec{f}_i^T]$$

$$\vec{f}_i^T = [1 \ f_1(x_i) \ f_1(y_i) \ f_1(x_i)f_1(y_i) \ \dots \ f_k(x_i) \ f_k(y_i) \ f_k(x_i)f_k(y_i)]$$

$i = 1 \dots N^2, N = 2^{k-1} + 1$  (7)

Die Lösung  $\vec{a}$  des Approximationsproblems (2) entspricht hier der Lösung  $\vec{a}_A^k$  des Ausgleichungsproblems (8) und ist der Gleichung (9) zu entnehmen. Als *theoretisches Genauigkeitsmaß der Approximation vom Grad  $k$*  kann die Norm des Vektors  $\|\vec{v}^k\|$  verwendet werden.

$$\underline{F}^k \cdot \vec{a}_A^k = \vec{Z}^k$$

$$\vec{a}_A^k = [a_0^A \ a_1^A \ b_1^A \ c_1^A \ \dots \ a_k^A \ b_k^A \ c_k^A]^T \tag{8}$$

$$\vec{Z}^k = [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_{N^2}]^T = [Z_i]^T,$$

$i = 1 \dots N^2.$

$$\|\vec{v}^k\| = \|\underline{F}^k \cdot \vec{a}_A^k - \vec{Z}^k\| \rightarrow \min(\vec{a}_A^k) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_A^k = ((\underline{F}^k)^T \underline{F}^k)^{-1} (\underline{F}^k)^T \vec{Z}^k \tag{9}$$

$$\|\vec{v}^k\| = \|\underline{F}^k ((\underline{F}^k)^T \underline{F}^k)^{-1} (\underline{F}^k)^T \vec{Z}^k - \vec{Z}^k\|$$

Hinweis 1: Wir verzichten in (9) auf die Darstellung der numerischen Lösung mittels der QR-Zerlegung. Diese kann zum Beispiel in SCHWARZ (1988) gefunden werden.

Nun soll das ursprüngliche Gitter mit  $(2^{k-1} + 1) \times (2^{k-1} + 1)$  Messwerten zu einem Gitter mit  $(2^k + 1) \times (2^k + 1)$  Messwerten er-

weitem werden, siehe Abb. 2. Zur Untersuchung der Güte der auf dem ursprünglichen Gitter durchgeführten Approximation vom Grad  $k$  auf dem nun erweiterten Gitter muss die Norm des Vektors  $\|\vec{v}^{k+1}\|$  aus (10) bestimmt werden:

$$\|\vec{v}^{k+1}\| = \|\underline{F}^{k+1} \cdot \vec{a}_A^k - \vec{Z}^{k+1}\| \quad (10')$$

Unter Verwendung der offensichtlichen Beziehungen (11) auf dem erweiterten Gitter

$$\underline{F}^{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{F}^k \\ \underline{F}^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\vec{Z}^{k+1} = \begin{bmatrix} \vec{Z}^k \\ \vec{Z}^* \end{bmatrix}$$

gilt für das theoretische Genauigkeitsmaß der polynomialen Approximation vom Grad  $k$  nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\|\vec{v}^{k+1}\| = \|\vec{v}^k\| + \|\underline{F}^* \cdot \vec{a}_A^k - \vec{Z}^*\| \quad (10'')$$

wobei der Lösungsvektor  $\vec{a}_A^k$  der Gleichung (9) zu entnehmen ist. Mit Stern werden in (11) die Blöcke der Matrix  $\underline{F}^{k+1}$  bzw. des Vektors  $\vec{Z}^{k+1}$  bezeichnet, die sich auf die neuen, nach der Gittererweiterung hinzu gekommenen Messwerte beziehen, d. h.:

$$\underline{F}^* = [\vec{f}_j^T]$$

$$\vec{Z}^* = [Z_j] \quad (11')$$

$$j = N^2 + 1, N^2 + 2, \dots (2^k + 1)^2$$

Als ein relatives theoretisches Genauigkeitsmaß der polynomialen Approximation vom Grad  $k$  auf dem erweiterten Gitter nach der Methode der kleinsten Quadrate kann das um die Anzahl  $(2^k + 1)^2$  der Punkte normierte theoretische Genauigkeitsmaß (10'') verwendet werden.

### 2.2 Das Wavelet-Spline-Verfahren

Wir führen nun eine einfache Operation ein, um die Darstellungsform der weiteren Ausführungen durch verschachtelte Matrizenprodukte nicht unnötig zu erschweren.

Definition: Die folgende Operation (12) wird als *Stretching* bezeichnet. Das Ergebnis der

Anwendung dieser Operation auf eine Matrix bzw. auf einen Vektor ist wiederum eine Matrix bzw. ein Vektor. Diese Operation führt zu einer durch einen ganzzahligen Vektor  $B$  gesteuerten Wiederholung einiger Zeilen der Matrix bzw. des Vektors  $A$ .

$$A \circ B = \begin{bmatrix} \left. \begin{matrix} A_1 \\ \dots \\ A_1 \end{matrix} \right\} B_1 \\ \left. \begin{matrix} A_2 \\ \dots \\ A_2 \end{matrix} \right\} B_2 \\ \dots \\ \left. \begin{matrix} A_n \\ \dots \\ A_n \end{matrix} \right\} B_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

wobei  $A$  und  $B$  eine identische Zeilenanzahl haben müssen.

Unter Verwendung der Bezeichnung (13), die in Bemerkung 1 erklärt wird, kann die eindeutige Lösung  $M^k$  des Approximationsproblems (2) mithilfe eines Wavelet-Splines aus der Gleichung (14) bestimmt werden. Der konstruktive Algorithmus zur sequentiellen Herleitung dieser eindeutigen Lösung kann in WÄLDER & BUCHROITHNER (2004) gefunden werden.

$$M^k = [\vec{m}_1^{1.Zelle} \dots \vec{m}_j^{1.Zelle} \vec{m}_j^{2.Zelle} \dots \vec{m}_j^{3.Zelle} \vec{m}_j^{4.Zelle} \dots \vec{m}_{4^k}^{(N-1)2.Zelle}] \quad (13)$$

$$(\vec{m}_i^{l.Zelle})^T = [a_0^S a_1^S b_1^S c_1^S \dots a_k^S b_k^S c_{k,1(x_i,y_i)}^{S,l.Zelle}]$$

$$i = 1 \dots N^2, l = 1, 2, \dots (N-1)^2$$

$$(\underline{F}^k \circ \vec{N}^k) \cdot M^k = \vec{Z}^k \circ \vec{N}^k$$

$$\|\vec{u}^k\| = \|(\underline{F}^k \circ \vec{N}^k) \cdot M^k - \vec{Z}^k \circ \vec{N}^k\| = 0 \quad (14)$$

wobei der Vektor  $\vec{N}^k$  eine Spalte mit ganzzahligen Elementen darstellt, von denen jedes jeweils der Anzahl der Spalten der Matrix  $M^k$  aus (13) entspricht, die sich dabei auf einen festen Punkt  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N^2$  bezieht. Dieser Vektor hängt von der Reihenfolge der Nummerierung der Punkte auf einem Gitter ab. Beispiel 1 veranschaulicht einige Bezeichnungen aus (13) und (14) für das Gitter in Abb. 3 (nur schwarze Punkte).

Die in (14) verwendete Operation wurde in Definition 1 eingeführt. Die Norm des Vektors der Abweichungen  $\vec{u}^k$  ist gleich Null. Die Interpolationsforderung (3) ist dabei erfüllt.

Beispiel: Verwendung der Bezeichnungen aus (13) und (14) für  $k = 2$ , siehe Abb. 3 (nur schwarze Punkte).

Die Nummerierung der Gitterpunkte und der Gitterzellen erfolgt hier von unten nach oben und von links nach rechts.

$$M^2 = [\vec{m}_1^{1.Zelle} \ m_2^{1.Zelle} \ \vec{m}_2^{2.Zelle} \ \vec{m}_3^{2.Zelle} \\ \vec{m}_4^{1.Zelle} \ m_4^3.Zelle \ \vec{m}_5^1.Zelle \ \vec{m}_5^2.Zelle \\ \vec{m}_5^3.Zelle \ m_5^4.Zelle \ \vec{m}_6^2.Zelle \ \vec{m}_6^4.Zelle \\ \vec{m}_7^3.Zelle \ \vec{m}_8^3.Zelle \ \vec{m}_8^4.Zelle \ \vec{m}_9^4.Zelle]$$

$$(\vec{m}_i^{l.Zelle})^T = [a_0^S \ a_1^S \ b_1^S \ c_1^S \ a_1^S \ b_2^S \ c_2^S]_{(x,y)},$$

$$i = 1 \dots 3^2, \ l = 1, 2, 3, 4$$

und

$$\vec{N}^2 = [1, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 1]^T$$

Bemerkung: Die Bezeichnung aus (13) soll an dieser Stelle nochmals näher erläutert werden. Wie man auch am Beispiel sehen kann, werden einige Gitterpunkte in die Berechnung von Spline-Koeffizienten zwei bzw. viermal einbezogen, weil sie gleichzeitig zu zwei bzw. vier benachbarten Gitterzellen gehören, siehe auch Abb. 3. Man kann leicht nachweisen, dass sich dadurch die Anzahl der Gleichungen in (14) bis auf  $4^k$  erhöhet, was der Anzahl der unbekanntenen Koeffizienten der Matrix  $M^k$  genau entspricht. In der Bezeichnung (13) wurde speziell die vierfache Berücksichtigung eines inneren Gitterpunktes  $m_j$  in den Gitterzellen mit den Nummern 1, 2, 3 und 4 hervorgehoben.

Nach der Erweiterung des ursprünglichen Gitters wie in Abb. 2 und unter der Berücksichtigung von (11) und (14), der Definition 1 und der fortlaufenden Nummerierung der dazu kommenden Punkte gilt für *das theoretische Genauigkeitsmaß der polynomialen Approximation vom Grad k mithilfe eines Wavelet-Splines:*

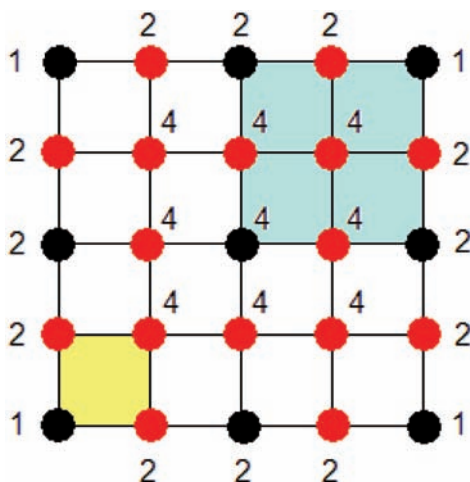


Abb. 3: Illustration der vierfachen Einbeziehung von Gitterpunkten für  $k = 2$  (nur schwarze Punkte, die exemplarische Gitterzelle ist hellblau) und  $k = 3$  (schwarze und rote Punkte, die exemplarische Gitterzelle ist hellgelb).

$$M^{k+1} = [M^k, M^*] \tag{15}$$

$$\vec{N}^{k+1} = \begin{bmatrix} \vec{N}^k \\ \vec{N}^* \end{bmatrix}$$

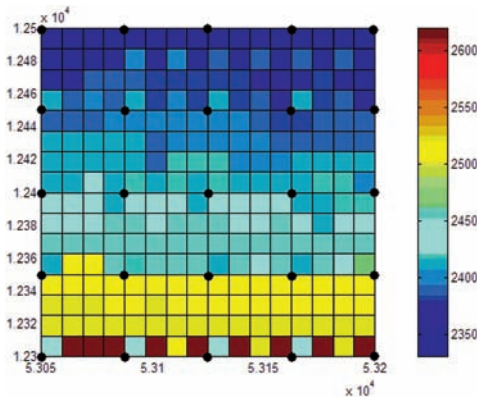
$$\begin{aligned} \|\vec{u}^{k+1}\| &= \|(\underline{F}^{k+1} \circ \vec{N}^{k+1}) \cdot M^{k+1} - \vec{Z}^{k+1} \circ \vec{N}^{k+1}\| \\ &= \|\vec{u}^k\| + \|(\underline{F}^* \circ \vec{N}^*) \cdot M^* - \vec{Z}^* \circ \vec{N}^*\| \\ &= \|(\underline{F}^* \circ \vec{N}^*) \cdot M^* - \vec{Z}^* \circ \vec{N}^*\| \end{aligned}$$

Als *ein relatives theoretisches Genauigkeitsmaß der polynomialen Approximation vom Grad k auf dem erweiterten Gitter nach dem Wavelet-Spline-Verfahren* kann das mit der Anzahl  $4^{k+1}$  der Punkte normierte theoretische Genauigkeitsmaß (15) benutzt werden.

### 3 Eine Fallstudie: Höhenmessungen am Blockgletscher Reichenkar in Tirol, Osterreich

Im Rahmen einer interdisziplinären Zusammenarbeit mit dem Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck wurden einige Untersuchungen am Blockgletscher Reichenkar (Tirol) durchgeführt. Der Reichenkar Blockgletscher liegt im In-





**Abb. 4:** 17 × 17-Gitter (Original) der Höhenmessungen (in [m]) aus einem Teilgebiet des Reichenkar Blockgletschers. Schwarz wurden die Stützpunkte des ursprünglichen 5 × 5 Gitters (Subgitter) gekennzeichnet.

neren Reichenkar, einem kleinen Seitental, das in Form eines Hängetales in das Sulztal mündet. Das Innere Reichenkar liegt ca. 4 km SE von Längenfeld im Ötztal bzw. 3 km S von Gries im Sulztal (westliche Stubai Alpen).

Von der Depression bis zur Stirn ist der Blockgletscher 1.400 m lang; im mittleren und unteren Teil 170–190 m breit und zeigt die Form eines Talgletschers. Er besitzt eine über 30 m mächtige aktive Stirn, die in einer Seehöhe von 2.310 m endet.

Zur Untersuchung des Bewegungsverhaltens dieses aktiven Blockgletschers wurden am Blockgletscher einige markierte Messpunkte (größere Felsblöcke mit eingemeißelten und mit roter Farbe markierten Messmarken) vermessen. Es wurde ein Bereich in der Stirnnähe ausgewählt. Mit diesen Höhenmessungen in diesem Bereich wurde ein regelmäßiges 17 × 17-Gitter erzeugt, das als Grundlage der Genauigkeitsuntersuchungen diente. Dieses Gitter weist starke Schwankungen der Messwerte auf, die durch eine Approximation auf der Basis seines 5 × 5-Subgitters nicht erfasst werden konnten, siehe Abb. 4. Das 5 × 5-Subgitter wurde als ursprüngliches Gitter ausgewählt.

Ausgehend von diesem 5 × 5-Gitter wurden polynomiale Approximationen des

**Tab. 1:** Koeffizientenüberblick für beide Methoden für die auf das Intervall [0,1] transformierten Rechts- und Hochwerte, [m].

Koeffizienten der Approximation vom Grad 3	Methode 1	Methode 2 (Mittelwerte über 16 Gitterzellen)
$a_0$	2431,2	2433,3
$a_1$	-1,9	-8,5
$b_1$	-25,2	-25,5
$c_1$	-7,2	-0,0
$a_2$	-0,8	0,5
$b_2$	-6,4	-4,1
$c_2$	3,7	4,3
$a_3$	0,2	0,5
$b_3$	-2,5	-0,7
$c_3$	1,3	5,6

Georeliefs vom Grad  $k = 3$  (10 Koeffizienten) mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate (Methode 1) und mittels des Wavelet-Spline-Verfahrens (Methode 2) durchgeführt. In Tab. 1 wird eine Koeffizientenübersicht beider Lösungswege präsentiert. Da es sich beim Wavelet-Spline-Verfahren um 16 verschiedene Gitterzellen mit jeweils 10 Koeffizienten handelte, wurden in Tab. 1 die *Mittelwerte dieser Koeffizienten* über alle 16 Gitterzellen gebildet.

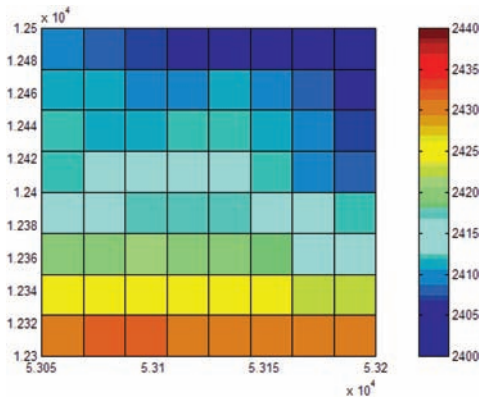
Nun sollten die *empirischen Genauigkeiten* beider Methoden an Hand einer Fallstudie verglichen werden.

Als *empirisches Genauigkeitsmaß* wurde für beide Methoden die *Summe der absoluten Abweichungen (Betrag des entsprechenden Wertes)* zwischen den wahren und den approximierten Messwerten auf einem erweiterten Gitter verwendet.

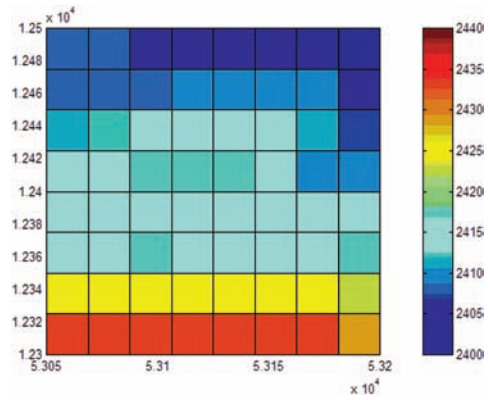
Die *empirische Genauigkeit der Approximation vom Grad 3* für das 5 × 5-Gitter erreichte, in [m]

68,285	nach Methode 1 und
0,0	nach Methode 2.

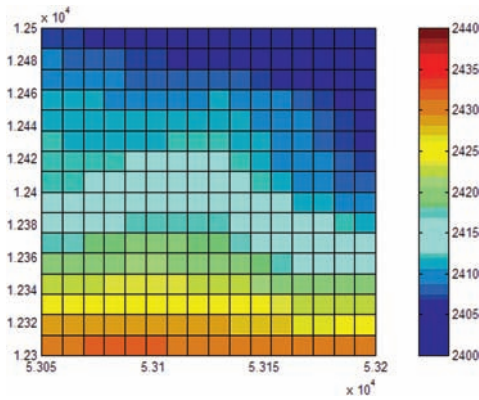
Die *empirische Genauigkeit der gleichen Approximation vom Grad 3* für das erweiterte 9 × 9-Gitter nach (10') und (14) erreichte



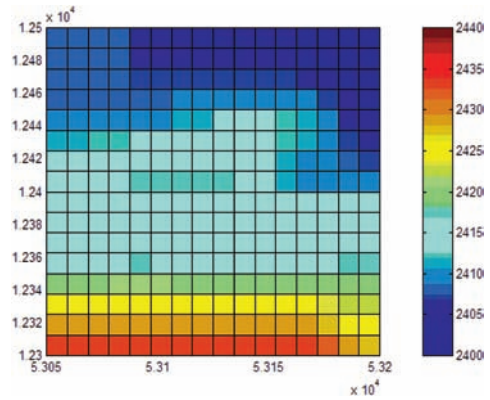
**Abb. 5a:** Darstellung des  $9 \times 9$ -Gitters mit der Approximation vom Grad 3 nach Methode 1, [m].



**Abb. 5b:** Darstellung des  $9 \times 9$ -Gitters mit der Approximation vom Grad 3 nach Methode 2, [m].



**Abb. 6a:** Darstellung des  $17 \times 17$ -Gitters mit der Approximation vom Grad 3 nach Methode 1, [m].



**Abb. 6b:** Darstellung des  $17 \times 17$ -Gitters mit der Approximation vom Grad 3 nach Methode 2, [m].

2391,5 nach Methode 1 (Abb. 5a) und  
2314,3 nach Methode 2 (Abb. 5b).

gende Werte der *empirischen Genauigkeiten der polynomialen Approximation vom Grad 3* ermittelt werden:

Eine weitere Erweiterung zum  $17 \times 17$ -Gitter führte für die *empirische Genauigkeit der Approximation vom Grad 3* zu folgenden Ergebnissen:

76,02 für  $5 \times 5$ -Gitter,  
2390,7 für  $9 \times 9$ -Gitter und  
12568 für  $17 \times 17$ -Gitter.

12580 nach Methode 1 (Abb. 6a) und  
12515 nach Methode 2 (Abb. 6b).

Wenn man anstatt der nach Methode 1 ermittelten Koeffizienten die *mittleren Koeffizienten* des Wavelet-Splines aus der Tab. 1 zur Approximation benutzte, konnten fol-

Es ist leicht zu verstehen, warum die Genauigkeit für das  $5 \times 5$ -Gitter für die Approximation mit Verwendung der mittleren Koeffizienten des Wavelet-Splines schlechter ist, als diejenige nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die nach Methode 1 ermittelten Koeffizienten (und dabei nur diese) für diesen Fall sind gerade diejenigen Koeffizien-

**Tab. 2:** Gegenüberstellung der relativen empirischen Genauigkeiten polynomialer Approximationen vom Grad  $k = 3$  in [m].

Gitter/ Methode	1	2	Mittlere Koeffizienten nach Methode 2
$5 \times 5$	2,7314	0,0	3,0409
$9 \times 9$	29,5249	28,5718	29,5149
$17 \times 17$	43,5288	43,3036	43,4892

ten, die zu einer polynomialen Approximation führen, die das Minimum der Abweichungen zwischen den wahren und den approximierten Messwerten aufweist.

Eine theoretische Begründung der Tatsache, wann und warum die empirische Genauigkeit für die mittleren Koeffizienten des Wavelet-Splines bessere Ergebnisse auf den erweiterten  $9 \times 9$ - bzw.  $17 \times 17$ -Gittern zeigt, ist dagegen nicht trivial.

Tab. 2 gibt einen zusammenfassenden Überblick der *relativen empirischen Genauigkeiten* (Summe der absoluten Abweichungen geteilt durch die Anzahl der Gitterpunkte) für die oben beschriebenen Fälle.

#### 4 Ausblick und Diskussion

Es wurden zwei verschiedene Ansätze zur Georelief-Approximation vorgestellt und an Hand einer Fallstudie verglichen. Das Testgebiet, ein Teil des Reichenkar Blockgletschers, wies starke „Unregelmäßigkeiten“ (lokale Schwingungen) im Relief auf – siehe Abb. 4. Gerade diese Eigenschaft machte die Gegenüberstellung beider Methoden besonders spannend, weil mit zunehmender Regelmäßigkeit eines Georeliefs ein geringerer Unterschied zwischen beiden Methoden bei fortschreitenden Gittererweiterungen zu erwarten ist.

Es konnte gezeigt werden, dass die „die Anzahl von Koeffizienten reduzierende“, und dabei auf die Interpolationsforderung (3) verzichtende, klassische Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate bei der Erweiterung des Gitters etwas ungenauer als die Wavelet-Spline-Methode ist, die die In-

terpolationsforderung berücksichtigt. Es kommt natürlich auf die konkrete, praktische Aufgabenstellung an, welche der beiden Methoden verwendet werden sollte.

#### Danksagung

Die Autorin möchte sich bei Prof. KRAINER, Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck, für die angenehme Zusammenarbeit und für die zur Verfügung gestellten Daten herzlich bedanken. Zudem sei dem Staatsministerium für Wissenschaft und Kunst des Freistaates Sachsen gedankt, das durch die Gewährung einer Habilitationsförderung ebenfalls zu dieser Arbeit beigetragen hat.

#### Literatur

- NIEMEIER, W., 2002: Ausgleichsrechnung: eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs- und Informationswesens. – Verlag de Gruyter, Berlin, New York.
- REIßMANN, G., 1976: Ausgleichsrechnung. – VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
- SCHWARZ, H. R., 1988: Numerische Mathematik. – Verlag B. G. Teubner, Stuttgart.
- WÄLDER, O. & BUCHROITHNER, M. F., 2003: Eine Anwendung von Spline-Verfahren zur DTM-Ausdünnung. – PFG **2003** (2): 99–104.
- WÄLDER, O. & BUCHROITHNER, M. F., 2004: A method for sequential thinning of digital raster terrain models. – PFG **2004** (3): 215–220.
- WÄLDER, O., KRAINER, K. & MOSTLER, W., 2004: Praktische Anwendung von speziellen Spline-Verfahren zur Gletscherkinematik am Beispiel eines aktiven Blockgletschers (Tirol). – VGI (Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation) **2004** (3/4): 107–117.
- WÄLDER, O., 2005: A method for sequential thinning of digital raster terrain models II: mixed locally adaptive wavelet-splines and anisotropy. – PFG **2005** (2): 123–127.

Anschrift der Autorin:

Dr. rer. nat. OLGA WÄLDER  
 Institut für Kartographie  
 Technische Universität Dresden  
 Mommsenstrasse 13, D-01062 Dresden  
 Tel.: +49-351-463-36200  
 Fax: +49 351-463-37028, e-mail:  
 Olga.Waelder@mailbox.tu-dresden.de

Manuskript eingereicht: März 2005  
 Angenommen: April 2005